

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 子計畫三：幾何學教材發展的研究

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2520-S-032-005-

執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

執行單位：淡江大學數學系

計畫主持人：余成義

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 21 日

# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量  
之研究 子計畫三：幾何學教材發展的研究

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2520-S-032-005

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

計畫主持人：余成義

執行單位：淡江大學數學系

中 華 民 國 九 十 二 年 八 月 一 日

## 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

### 計畫名稱：微積分學習之多元輔助教材的研發與評量 之研究 子計畫三：幾何學教材發展的研究

計畫編號：NSC91-2520-S-032-005

執行期間：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：余成義

E-mail: cherngyi@math.tku.edu.tw

執行機構及單位名稱：淡江大學數學系

#### 幾何學中曲線及曲面單元之教材設計

#### 一、中文摘要

本計畫為「微積分學習之多元輔助教材的研發與評量之研究」之下的子計畫三：幾何學教材發展的研究 其主要研究在於研發幾何學教材，同時也建構教學平台，並實際運用媒體教學，評估教學成效，預計在下學年擴大推廣此幾何學教學平台，並加以改良實施

關鍵詞：幾何學，曲線，曲面。

## 二、英文摘要

The purpose of this project “subplan 3: Geometry handbook development” under the main project “study of the development of multi-media instructional materials in assisting learning Calculus” is to develop learning material for Geometry. This year we finished the design of basic material for curve and surface. Besides, we construct the teaching platform for Geometry. At the same time, this platform has been implemented and we are evaluating its effect for the learning process of students. We are looking forward to further improvement.

Keywords: geometry, curve, surface.

曲線與曲面為幾何學中的兩大主題，在物理、數學、經濟、天文等領域有相當廣泛的應用。在科學的領域中吾人常將實際的問題轉為數學模型去考慮，其中最重要的精神在於將要處理的現象用函數的語言去表達。根據函數值的分布，吾人可利用一系列的等高線或等高面去重新架構出原函數圖形的風貌藉此了解所處理的函數。因此如何精準掌握曲線與曲面實為值得學習的主題。

在曲線理論中吾人從兩種不同的觀點去介紹曲線的意義。從解方程式的觀點出發得到等高線的概念，從物理上質點運動的軌跡去看引導出曲線參數式的描述方法。為了精準地掌握曲線並藉以分類曲線，從曲線本身抽取出兩種不同的量化函數，一為曲率另一為扭率。曲率度量出曲線偏離切線方向的程度，扭率度量出曲線偏離由切線方向及法線方向所構成之平面的程度。再利用數學中解微分方程的理論得到曲線理論中最重要的概念即曲線基本定理，其重點為曲率及扭率這兩種量化函數幾乎可完全決定曲線本身最多也只差剛體映射。曲線基本定理的來源來自於解所謂的 Frenet 方程組。此方程組敘述沿著曲線所定義的一組浮動式基底向量場之變化可藉由曲率及扭率來表達。故藉由解 Frenet 方程組吾人可精準地掌握曲線的動向。

如同在曲線理論中所處理的手法，在曲面理論中吾人從兩種不同的觀點去介紹曲面的意義。一為等高面的概念，另一為曲面參數式的描述方法。在量化方面，在曲面理論中介紹有 Gaussian 曲率及 Mean 曲率兩種不同的方式去度量曲面偏離切平面的程度。從曲面可由一系列的曲線架構而成這個觀點去看，Gaussian 曲率約可視為所對應曲線曲率之幾何平均，而 Mean 曲率約可視為所對應曲線曲率之算術平均。在考慮切平面變動時，吾人事實上所採用的方法是度量切平面所對應之法向量的變化。事實上沿著不同的方向去考慮切平面變動，吾人得到不同的度量值。從大域去考慮切平面變動引導出在曲面理論中非常重要的從切平面到切

平面的線性映射，可用一矩陣來描繪出此線性映射 藉由矩陣的不變量-行列式值定義出曲面的 Gaussian 曲率，藉由矩陣的另一不變量-Trace 值定義出曲面的 Mean 曲率

#### Reference

1. John A. Thorpe, Elementary Topics in Differential Geometry, Springer-Verlag New York Inc., 1979.
2. Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall International, Inc., 1976.
3. Barrett O' Neill, Elementary Differential Geometry, Second Edition, Academic Press. 1997.